LIMITES ET DÉRIVATION

1. : Donner un exemple où $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right) \neq \lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)$.

2. On pose $f(x,y) = \dfrac{xy}{|x|+|y|}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$

   (a) Déterminer et tracer la courbe de niveau 1 C_1 de f.

   (b) Montrer que la courbe de niveau $k>0$ de f est l'image de C_1 par une homothétie de rapport k et que la courbe de niveau $-k$ est l'image de C_k par la symétrie d'axe Ox.

   (c) Tracer C_k pour $k = 0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 2$.

3. :

   (a) Soient α, β, γ et δ des réels $\geqslant 0$; on pose $f(x,y) = \dfrac{|x|^\alpha |y|^\beta}{|x|+|y|}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$, et $f(0,0) = 0$.
   Montrer que f est continue en $(0,0)$ si et seulement si $\alpha+\beta>1$; autrement dit,

   $$|x|^\alpha |y|^\beta = o(\|(x,y)\|) \Leftrightarrow \alpha+\beta>1$$

   Indication : pour la condition nécessaire, regarder $f(x,x)$; pour la condition suffisante, montrer que $0 \leqslant f(x,y) \leqslant (|x|+|y|)^{\alpha+\beta-1}$, ou utiliser les coordonnées polaires.

   (b) Soient $\alpha, \beta \geqslant 0$, γ, $\delta > 0$; on pose $g(x,y) = \dfrac{|x|^\alpha |y|^\beta}{|x|^\gamma + |y|^\delta}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$, et $g(0,0) = 0$.
   Trouver à l'aide de la première question une condition nécessaire et suffisante pour que g soit continue en $(0,0)$.

4. : **Les cônes** :
   Soit f une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que

   $$(1) : (\forall \lambda, x, y \in \mathbb{R}) \ \ f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x,y)$$

   On considère S la surface d'équation cartésienne $z = f(x,y)$.

   (a) Que dire de S lorsque f est linéaire ?

   (b) Donner un exemple d'une fonction f vérifiant (1), sans être linéaire.

   (c) Montrer que S est une réunion de droites passant par O.
   S s'appelle un cône de sommet O.

   (d) Montrer que f est dérivable suivant tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (v,w) en $(0,0)$ et que $(D_{\overrightarrow{u}}(f))(0,0) = f(v,w)$.

   (e) En déduire que si f n'est pas linéaire, f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

5. : On pose $f(x,y) = \dfrac{x^6}{x^6 + (y-x^2)^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$, et $f(0,0) = 0$.

   (a) Montrer que f est dérivable suivant tout vecteur en $(0,0)$ de dérivée nulle et que pourtant f n'est même pas continue en $(0,0)$.

6. : On pose $f(x,y) = \dfrac{x^3 y}{x^4 + y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$, et $f(0,0) = 0$.

   (a) Montrer que f est continue en $(0,0)$.

   (b) Montrer que f est dérivable suivant tout vecteur en $(0,0)$, et que l'on a bien $\left(D_{(x,y)} f\right)(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)y$.

(c) Montrer que par contre l'on n'a pas $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|} = 0$, et que donc le développement limité à l'ordre 1, qui devrait être

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + o(\|(x,y)\|)$$

de f en $(0,0)$ n'existe pas.
<u>Indication</u> : considérer le chemin $y = x^2$.

(d) Quel est le vecteur tangent à la courbe $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = f(t,t^2) \end{cases}$ au point de paramètre 0 ? La surface d'équation $z = f(x,y)$ possède-t-elle un plan tangent en $(0,0,0)$?

7. * : cf. exercices 2 et 6. Soient $\alpha, \beta > 0$, $\gamma \geqslant \delta > 0$; on définit f sur le quart de plan $\mathbb{R}_+^2$ par : $f(x,y) = \dfrac{x^\alpha y^\beta}{x^\gamma + y^\delta}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$, et $f(0,0) = 0$.

(a) Montrer que f est continue en $(0,0)$ ssi $\dfrac{\alpha}{\gamma} + \dfrac{\beta}{\delta} > 1$.

(b) Montrer que f est dérivable suivant tout vecteur de pente positive en $(0,0)$ ssi $\alpha+\beta \geqslant 1+\delta$ et que si $\alpha+\beta > 1+\delta$, $(D_{\overrightarrow{u}} f)(0,0) = 0$ pour tout $\overrightarrow{u}$ de pente positive.

(c) Montrer que f possède un développement limité à l'ordre 1 en $(0,0)$ ssi $\dfrac{\alpha}{\gamma} + \dfrac{\beta}{\delta} > 1 + \dfrac{1}{\gamma}$ et $\alpha+\beta > 1+\delta$ et qu'alors ce développement est $f(x,y) = o(\|(x,y)\|)$.

(d) Montrer que f est de classe C^1 en $(0,0)$ ssi $\dfrac{\alpha}{\gamma} + \dfrac{\beta}{\delta} > 1 + \dfrac{1}{\delta}$.

(e) Donner un exemple de fonction dérivable dans toutes les directions de dérivée nulle en un point et qui pourtant n'est pas continue en ce point.
Rep : 41102.

8. : Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, $p = D_1 f$ et $q = D_2 f$;

(a) Exprimer en fonction de p et q :

i. $\dfrac{\partial}{\partial x}(f(y,x))$

ii. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(y,x)$

iii. $\dfrac{\partial}{\partial y}(f(y,x))$

iv. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(y,x)$

v. $\dfrac{d}{d\theta}(f(\cos\theta, \sin\theta))$

vi. $\dfrac{\partial}{\partial x}(f(xy, x+y))$

vii. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(xy, x+y)$:

(b) Calculer les expressions ci-dessus pour $f(x,y) = x^3 y$.

9. : On dit que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est positivement homogène de degré r $(r \in \mathbb{R})$ lorsque :

$$\forall (x,y) \in D_f \ \forall t > 0 \quad (tx,ty) \in D_f \text{ et } f(tx,ty) = t^r f(x,y)$$

(a) Reconnaître les fonctions positivement homogènes parmi les suivantes :

i. $f : (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$

ii. $f : (x,y) \mapsto \dfrac{y}{x}$

iii. $f : (x,y) \mapsto x^2+y^2+1$

iv. $f : (x,y) \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

(b) Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ et homogène de degré $r \neq 0$, alors

$$\forall (x,y) \in \mathcal{U} \quad f(x,y) = \frac{1}{r} D_{(x,y)}(f)(x,y)$$

(Rappelons que $D_{(dx,d,y)}(f)(x,y) = (D_1 f)(x,y)\,dx + (D_2 f)(x,y)\,dy$).
C'est la relation d'Euler ; indication : dériver par rapport à t la relation de départ.

10. : Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$

(a) Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ f''_{xy}(x,y) = 0$
si et seulement s'il existe g et h de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ f(x,y) = g(x) + h(y)$.

(b) Résoudre de même l'équation aux dérivées partielles : $f''_{x^2}(x,y) = 0$.

(c) * Résoudre $f^{(p+q)}_{x^p y^q}(x,y) = 0$.

11. :

(a) Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que :

$$\big(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad (D_1 f)(x,y) = (D_2 f)(y,x)\big) \Leftrightarrow \big(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = f(y,x)\big)$$

(b) Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que :

$$\big(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = f(y,x)\big) \Rightarrow \big(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad (D_{1,2} f)(x,y) = (D_{1,2} f)(y,x)\big)$$

12. * : Leibniz à partir de Newton.
Soit $h \in \mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{R})$; on pose $I = \{x \ / \ (x,x) \in U\}$ et pour x dans I , $k(\ x) = h(x,x)$;

(a) Montrer que $k^{(n)}(x) = \left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\right)^n (h)(x,x)$.

(b) Soient $f, g \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{C})$, I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et $h(x,y) = f(x)g(y)$ $\left(h \in \mathcal{C}^n\left(I^2,\mathbb{R}\right)\right)$; en appliquant la formule du binôme à $\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\right)^n$ et en utilisant (a) montrer que $(fg)^{(n)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^k(x) g^{n-k}(x)$.

13. : Calculer la différentielle et le gradient des applications de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ suivantes $\big(A$ et B sont des points fixés de $\mathbb{R}^2\big)$.
Vérifier dans chaque cas que $\overrightarrow{\text{grad}} f_{M_0}$ est orthogonal à la courbe de niveau $f(M) = f(M_0)$.

(a) $M \mapsto AM^2$ Rep : $2\overrightarrow{AM}$

(b) $M \mapsto AM$ Rep : $\dfrac{\overrightarrow{AM}}{AM}$

(c) $M \mapsto AM^3$ Rep : $3AM.\overrightarrow{AM}$

(d) $M \mapsto AM^2 + BM^2$

(e) $M \mapsto \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}$ Rep : $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$

(f) $M \mapsto AM + BM$ Rep : $\dfrac{\overrightarrow{AM}}{AM} + \dfrac{\overrightarrow{BM}}{BM}$

(g) $M \mapsto AM.BM$ Rep : $AM\dfrac{\overrightarrow{BM}}{BM} + BM\dfrac{\overrightarrow{AM}}{AM}$

(h) $M \mapsto d(M,\mathcal{D})$ où $\mathcal{D}$ est une droite de $\mathbb{R}^2$. Rep : $\dfrac{\overrightarrow{HM}}{HM}$ où $H = p_{\perp\mathcal{D}}(M)$

14. : **Contradiction au théorème de Schwarz dans un cas pathologique** :
Soit g une fonction numérique de deux variables de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage pointé de $(0,0)$.
On pose $f(x,y) = xyg(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

(a) Vérifier que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

(b) Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, si elle existe, vaut nécessairement $\lim_{x \to 0} g(x,0) = l_1$. Calculer de même $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$, si elle existe.

(c) En déduire un exemple de fonction f pour laquelle :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

EXTREMUMS

15. : Pour chacune des fonctions suivantes déterminer et tracer la courbe de niveau 0, tracer d'autres courbes de niveau de manière qualitative, déterminer les points critiques (i.e. les points où la différentielle s'annule), et déterminer s'ils correspondent à des extremums ou des cols.

(a) $f(x,y) = (y-x)\left(y-x^2\right)$ Rep : 1 minimum, 2 cols

(b) $f(x,y) = \left((y-x)^2 - 1\right)\left((y+x)^2 - 1\right)$ Rep : 4 cols, 1 maximum
display(plot3d(((y-x)^2-1)*((y+x)^2-1), x=-2..2,y=-2..2),plot3d(0, x=-2..2,y=-2..2,color=red,style=patchnogrid),style=

(c) $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^2 - x^2$ Rep : 2 minimum, 1 col
ContourPlot[(x^2 + y^2)^2 - x^2, {x, -1.5, 1.5}, {y, -1.5, 1.5}, PlotRange -> {-1, 1}]

(d) $f(x,y) = \left(x^2+y^2-3\right)^3 - 4x^2$ Rep : 1 maximum, 2 minimums, 2 cols

(e) $f(x,y) = y^2 - \sin^2 x$ Rep : ∞té de minimums, ∞té de cols

16. : Soit $f : (x,y) \mapsto \sin x \sin y$

(a) Dessiner la courbe de niveau 0 de f dans le carré $[-\pi,\pi]^2$ et indiquer les zones où f est positive et celles où elle est négative.

(b) Déterminer les points critiques de f et dessiner des courbes de niveaux de f de façon qualitative.

(c) Déterminer la nature des points critiques (maximum, minimum ou col).

(d) Mêmes questions que les trois premières pour $g : (x,y) \mapsto \sin x + \sin y$

(e) * Démontrer que les surfaces associées aux fonctions f et g sont images l'une de l'autre par une transformation affine que l'on étudiera.

17. : Soit $f : (x,y) \mapsto \left(y-x^2\right)\left(y-2x^2\right)$.

(a) Tracer la courbe de niveau 0, puis d'autres courbes de niveau de façon qualitative.

(b) Montrer que f ne possède qu'un seul point critique, et que c'est un col.

(c) Montrer que pourtant, la restriction de f à chaque droite passant par ce point-col y possède un minimum strict (contre-exemple trouvé par Peano en 1884).

18. : La selle pour singe.
Soit $f : (x,y) \mapsto x\left(x^2 - 3y^2\right)$.

(a) Déterminer la courbe de niveau zéro et indiquer sur une figure les zones ou f est positive et celles où elle est négative. Tracer des courbes de niveau de façon qualitative.

(b) Déterminer les points critiques et donner leur nature.

(c) Montrer que la surface associée à f est invariante par une rotation d'axe Oz et d'angle $2\pi/3$ (passer en coordonnées polaires).

(d) Dire pourquoi cette surface s'appelle "selle pour singe"...